II



Contribution à la théorie des mouvements des liquides visqueux, et en particulier des ~~mouvements~~ problèmes ~~surtout~~ (en deux dimensions.

I Conditions suffisant à la détermination du mouvement.

§1. ~~On sait que~~, D'après les recherches des H., K., R., les équations qui définissent le mouvement lent des liquides visqueux au cas du régime permanent, c'est-à-dire :

(1)

n'ont qu'une seule intégrale ~~remplissant~~ satisfaisant aux conditions de la continuité et à la condition que les vitesses u, v, w prennent des valeurs données à la surface de l'espace en question. Donc, si l'on a trouvé une telle solution, on sait que c'est la seule possible.

Mais ~~des~~ des difficultés se présentent, lorsqu'on essaye (en s'appuyant sur ce théorème) de construire ~~si l'on veut profiter de ce théorème pour~~ des mouvements ~~problèmes~~ qui correspondraient aux problèmes fournis par l'expérience.

D'abord il faut remarquer, que les preuves du théorème mentionné reposent sur ~~exigent~~ la supposition sousentendue que l'espace S, à la surface duquel les valeurs des vitesses sont données, ne soit pas infini. Car elles exigent qu'une intégrale de la forme $\int \ldots$ devienne zéro par suite de ce que la grandeur F y ~~...~~ est zéro, ~~et ce~~ raisonnement qui n'est pas applicable au cas d'une surface S infinie, où $\lim F \neq 0$.

En effet nous rencontrerons plus loin ~~aurons à faire avec~~ quelques ~~des~~ mouvements différants $\int \ldots$ qui tous

~~[illegible]~~ satisfont à la condition lim... = 0 (tandis que ~~[illegible]~~ la seule solution qui ~~coïncidait~~ consiste ~~[illegible]~~ avec l'immobilité du liquide aux parois d'un vaisseau de grandeur finie est l'état ~~[illegible]~~ du repos ~~[illegible]~~ absolu).

Donc le théorème en question n'est pas vrai dans ce cas.

§2). Ensuite on observera ~~[illegible]~~ Remarquons de plus qu'on ~~produit des mouvements~~ établit un régime permanent du mouvement, en pratique, ~~dans~~ en reliant ~~le~~ un conduit donné ~~entre~~ avec deux réservoirs, où l'on maintient ~~une différence~~ des pressions hydrostatiques différentes. L'expérience nous montre, qu'alors le mouvement est défini, pour ~~un~~ un conduit donné, par la différence de la pression exercée sur la surface du liquide dans ces deux réservoirs, et qu'il est indépendant de la forme et ~~de la grandeur~~ des dimensions de ceux-là, s'ils sont de grandeur suffisante.

~~Donc La question s'impose~~ nous nous demandons : si ces conditions qui déterminent aux limites données par l'expérience définissent le problème théorique c'est à dire, dans quel cas suffira-t-il pour ~~déja~~ déterminer le mouvement (théoriquement) d'indiquer ~~de cette grandeur~~ les valeurs limites, de la pression, ~~suffit~~ au lieu de ces trois ~~[illegible]~~ vitesses, ~~suffira-t-elle à la détermination théorique du mouvement~~[2]

~~En général Il ne suffit pas~~ (C'est évident que la connaissance de la pression n'est pas suffisante, en général), ~~[illegible]~~ mais il suffit de connaître les trois ~~pressions~~ tensions p_{xn} -- , ~~[illegible]~~ ~~s'exerçant~~ exercées sur la surface S, si S est fini ce qui se vérifie aisément à l'aide de l'équation 2 qui va suivre.

§3). Dans le cas d'un espace S infini, au contraire, on prouve une proposition qui explique les questions soulevées ci-haut :

Une distribution donnée des tensions (finies) agissants p. ex. — , dans l'infini, pour des parois données ne peut produire (dans un vaisseau donné) qu'un seul mouvement „fini". ~~Nous y appellons mouvement fini~~

Tels mouvements seront appellés „finis", dont les vitesses sont partout finies et en outre, dont le flux total traversant la surface S — évalué des valeurs absolues des vitesses — reste fini, lorsque S s'étend à l'infini.

C'est à dire ....

Un cas spécial du mouvement fini, qui correspond aux exemples contenant tous les réalisables en pratique mentionnés auparavant, c'est le mouvement qu'on pourrait appeler

c'est à dire, dont les lignes de flux peuvent s'étendre jusqu'à l'infini, mais de telle sorte qu'aucune ne reste dans une distance infinie dans toute son étendue. Dans ce cas chaque tube de flux peut être coupé, dans l'endroit où il se trouve dans une distance finie, de telle sorte que la somme des coupes transversales Σq soit finie. Par conséquent le flux qui les traverse $\Sigma (v) q = T$ sera fini et par suite de l'invariabilité du produit vq le long d'un tube de flux : lim .... ~~Si tous~~ S'il n'y a pas des lignes de flux fermées le signe d'égalité sera valable.

§ 4). D'abord c'est facile de démontrer ~~qu'aucun mouvement~~ qu'il ne peut pas naître de mouvement fini, si les tensions à l'infini sont zéro. Cela résulte de l'équation qui exprime l'égalité du travail exercé par les tensions sur la surface S et de l'énergie dissipée par suite de la viscosité:

// . . . .

Cette équation, où Φ désigne . . . la fonction dissipation, ~~résulte de~~ s'obtient par la substitution des grandeurs

et par intégration partielle etc. en ayant égard aux équations (1).

L'intégrale ~~de surface~~ double s'étend sur la surface extérieure de S, sur les parois stables ~~qui contiennent~~ ~~le liquide~~ ~~qui limitent le mouvement~~ et tous les surfaces où p . . . sont discontinues. Mais par des simples raisons de mécanique, des ~~telles~~ surfaces de discontinuité ~~sont impossibles~~ ne peuvent pas exister au sein du liquide; ce n'est que sur certaines lignes ou dans certains points des parois (p. ex. sur des arêtes pointues) que telles discontinuités sont ~~admissibles~~ possibles.

Mais dans ce cas la condition doit être satisfaite que la valeur du travail exercé par les pressions sur une surface qui enveloppe ces endroits de discontinuité ~~points ou lignes~~ se réduise à zéro lorsque cette surface se rétrécit à zéro, puisque la paroi immobile ne peut pas produire de travail. Nous ne considérons que de telles solutions des équations (1) ~~seulement seront employées~~ qui satisfont à ces conditions de continuité, car elles seulement ont une signification physique . . . peuvent s'appliquer aux phénomènes physiques.

Dans l'équation 2) la partie de l'intégrale ~~superficielle~~ double correspondant qui se rapporte aux parois immobiles, ne contribue en rien à la valeur du travail, par suite de l'adhésion complète du liquide aux parois (c'est à dire $u = v = w = 0$)

Il n'y reste que ce qui provient des parties ~~que les parties provenant~~ de la surface S' situées au sein du liquide. La valeur absolue de cette intégrale sera ~~plus~~ moindre, évidemment

que le produit de la grandeur G (défini dans § 3) dans les valeurs maxima des ~~pressions~~ tensions px.... qui agissent en S. Mais celles-ci ~~~~ se réduisent à zéro ~~tendant vers zéro~~ lorsque nous étendons S à l'infini, ce qui fait ~~~~ l'intégrale double. Donc la fonction Φ sera zéro, ce qui exige, ~~~~ ~~puisque~~ qu'on ~~~~ ait partout $u=v=w=0$.

Les mouvements lents (1) obéissent à la lois de superposition, ~~donc~~ par conséquent on peut ~~conduire~~ poursuivre une voie de raisonnement ~~~~ manière bien connue: s'il y avait deux différents mouvements finis u.... , ~~qui seraient possibles aussi~~ compatibles avec la même distribution des ~~pression~~ tensions px.... — alors la différence $u-u'$.... représenterait un mouvement produit par des tensions ~~~~ zéro; ~~donc~~ ~~~~ mais nous venons de démontrer, que dans ce cas cette différence ~~~~ ne peut être que zéro partout.

Donc notre proposition concernant la détermination du mouvement à l'aide des trois tensions agissantes à l'infini est démontrée.

§ 5). Considérons encore l'état du mouvement à l'infini: On ~~peut démontrer~~ prouve aisément que le vaisseau dans lequel le mouvement a lieu ~~doit~~ ne peut pas avoir une section finie dans l'infini, ~~~~ ~~mouvement appartient à la classe~~ ~~~~ ~~prendre~~ si ~~~~ y est un mouvement fini être produit par des pressions finies agissantes à l'infini.

(A fin de préciser ce que nous appelons „section" d'abord I construisons une sphère à rayon R, autour de l'origine des coordonnées; ce sera cette partie de sa surface qui

S est découpée par l'intersection avec les parois du vaisseau

Or imaginons que cette section ($\lim_\infty S$) soit fini. Dans ce cas il faut distinguer :

Ou les vitesses à l'infini sont infiniment petites, et par conséquent le travail exercé par les tensions est vanissant ce qui entraîne d'après (2) que Φ soit zéro partout, donc $u = v = w = 0$.

Ou les vitesses y seraient finies et par conséquent aussi la valeur du travail ; mais ce serait en contradiction avec ce que Φ par suite des valeurs finies de $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. ne serait zéro nulle part, donc $\iiint \Phi \, d\omega$ serait infini.

Donc il en résulte la nécessité d'une section $\lim_\infty S$ infinie.

Par conséquent, il faut, à fin que le mouvement soit „fini", que les vitesses soient infiniment petites à l'infini, comme $\frac{1}{R^2}$ dans le cas des trois dimensions, comme $\frac{1}{R}$ dans le cas de deux dimensions (avec exception possible de certains points singuliers). De même les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ ... y sont vanissantes, ce qui résulte aussi de ce que $\iiint \Phi \, d\omega$ doit être fini. D'où on conclura d'après (3) que : $\lim p_{xy} \ldots = 0$; $\lim p_{xx} \ldots = p$

Donc en général il suffit pour la détermination complète des mouvements finis, qui s'étendent à l'infini, — problème correspondant aux phénomènes de pratique — de fixer la distribution d'une grandeur seulement : de la pression p qui règne à l'infini. Cela explique les questions soulevées dans le § 2.

Mouvements ~~à deux~~ en deux dimensions

§6. Tandis que les mouvements deux dimensionels des liquides idéales ont été ~~examinés~~ étudiés par un nombre de mathématiciens, on s'est occupé très peu de pareils ~~mouvements~~ (dans des liquides visqueux, quoiqu'ils soient ~~qui pourtant sont~~ (encore) plus intéressant au point de vue de physique.

Il ~~me~~ paraît que la transpiration des liquides entre des plateaux parallèles, le mouvement rotatoire des liquides entre des cylindres coaxiales et certains mouvements à l'intérieur d'un cercle, étudiés par ~~M.~~ Rayleigh à l'aide de la méthode des sources et sinks" sont les seuls exemples d'un régime permanent ~~des mouvement deux dimensional dans les liquides visqueux~~ (de tels mouvements) connus.

Il me semble par conséquent que les exemples de pareils ~~tels~~ mouvements donnés plus loin ne sont pas dénoués d'un certain intérêt, surtout puisque ce sont les représentants les plus simples d'un mouve- s'étendant à l'infini.

D'abord nous établirons une certaine forme de la solution générale des équations (1) dans le cas dit. Celles ci peuvent ~~être écrites~~ s'écrire par suite de l'incompress. dans la forme:

où ξ, (ce qui signifie la vitesse de rotation ξ ... ~~et~~ doit satisfaire à l'éq. ....

Les lignes de pression égale et de tourbillonnement égal forment donc un système orthogonal

Mais la solution se présente sous une forme ~~plus très~~ beaucoup plus commode lorsque nous introduisons la fonction (de flux) ψ, à l'aide des relations: ...

D'où après avoir déterminé φ on pourrait déduire u, v, ~~des équations (1)~~ en appliquant aux équations (1) des méthodes de la théorie du potentiel

et les variables indépendantes: –

Il en résultent les relations:

La fonction ψ doit satisfaire à l'équation qui se déduit de (5):

(8)

Dont la solution générale est: ψ=

Mais comme φ= doit être réel, ~~est~~ ces solutions appartiendront à une des deux classes – (où f signifie une fonction réelle):

A B

ou ~~m~~ elles résulteront de la superposition de deux telles fonctions, et en outre d'un mouvement ordinaire potentiel(?) correspondant aux termes f_3, f_4:

C). D).

Comme paroi du vaisseau nous pouvons regarder les surfaces où u ......

dont l'équation peut être mise dans la forme: (12)

Mais nous ne savons pas, comment ~~...~~ la solution ~~doit être choisie~~ (on ~~doit~~ peut choisir) qui corresponde à une certaine forme (donnée) des parois, ~~nous ne savons pas~~ même, s'il y a toujours de telles solutions. (*) et c'est n'est pas certain

Stokes cylinder

~~C'est certain seulement~~

Nous savons seulement que, en général, les fonctions $f g$ n'auront pas des points singulars dans l'espace rempli par le liquide, si le mouvement est fini; ceux-ci seront situés dans l'espace occupé par les parois ou au delà des parois.

§ 7. ~~Envisageons~~ Nous étudierons plus en détail le cas le plus simple : d'une paroi plane $y=0$.

Adoptons d'abord la forme .. avec le mouvement potentiel correspondant

d'où résultent les expressions : (13)

En y substituant .. pour les valeurs ... on parvient à la relation :

qui transforme ces équations (13) dans (14)

Donc ~~en substituant~~ on obtiendra un mouvement compatible avec la condition de repos à la paroi .. en y substituant une fonction quelconque qui n'a qu'une valeur .. ..

mais en général ces mouvements qui n'appartient pas à la classe finie ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ sont peu intéressants.

Mais adoptons la forme : (15)

où $r_1\ r_2\ \theta_1\ \theta_2$ désigne les rayons ~~distances~~ entre les ~~des~~ points ± 1 ~~et~~ le point α, et les angles enfermés avec l'axe X, tandis que r, θ désigneront dans ce qui suit les valeurs analogues par rapport au point 0.

Cette fonction u .. mais en la substituant dans (14) on remarque ~~si nous décrivons les vitesses de (14)~~

~~nous voyons~~, que les vitesses ~~[illegible]~~ vanissent pour $\theta_1=\theta=\theta_2=0$ et $\theta_1=\theta=\theta_2=\pi$, c'est-à-dire pour ~~la paroi~~ les parties de l'axe X situées dans l'étendu de ± 1 $\pm\infty$

Par conséquent on peut adopter ~~adoptons~~ ces parties comme des parois ~~et si nous adoptons admettons cette paroi comme une barrière~~ infranchissables ~~nous faisons~~ et qui fait la fonction –

Les équations (10) nous donnent la valeur du tourbillon et de la pression ~~…~~ comme fonction adjointe:

Dans une distance infinie on aura … pour des y positives,

… pour … et par conséquent … ~~d'espace~~ ; pour les parties correspondantes de l'espace. La différence de pression des deux côtés de la paroi, qui produit le mouvement, est 4μ unités; pour des valeurs différentes il ne faudrait que multiplier toutes les vitesses dans la même proportion.

La vitesse entre les points $\pm c$ est … et la quantité totale du liquide qui ~~…~~ passe par cette ouverture:

ou en terme de la pression active Δp:

Comme c'est un mouvement fini, c'est le seul ~~…~~ représentant qui corresponde à une telle différence de pression des deux côtés. Les lignes de flux qui ~~démontrent les…~~ représentant cet écoulement sont …

§8). Il faut (compléter) encore (Cette analyse ~~…~~ ~~…~~ en examinant l'état du mouvement dans l'infini et dans le voisinage immédiat des points $\pm c$

Pour une distance r très grande on ~~…~~ a:

~~En considérant que~~ Comme c'est une quantité très petite, on tire de (16):

: (21)

~~Dans~~ Donc à une distance considérable de l'ouverture le liquide ~~se meut~~ est animé d'une ~~mouvement~~ vitesse radiale; ~~avec la vitesse~~ V=

Ces équations (21) peuvent être considérées comme définition d'un écoulement par une ouverture très petite percée dans la paroi 1=

elles ~~sont identiques~~ coïncident avec la solution obtenue par Rayl,

pour l'écoulement ~~d'un trou infiniment petit~~ d'une source située dans la périphérie d'un cercle,

(. --) dans le voisinage immédiat de cette source.

La même solution s'obtient directement de (19) ~~par~~ en supposant:

mais ~~elle~~ cette méthode n'explique ~~[illegible]~~ pas l'état dans le point singulier z=0.

On en ~~tire~~ dérive les fonctions φ=

et les ... ,

qui résulteraient aussi des équations à l'aide du développement:

~~Le~~ Pour une distribution donnée des sources et déversoirs sur la paroi y=0 le mouvement résultant, compatible avec la condition du repos sur le reste de cette paroi, s'obtiendrait par sommation (ou intégration) ~~de~~ des expressions (21) ~~les~~ multipliées par des ~~coefficients~~ constantes.

§9). A fin d'examiner l'état de mouvement dans le voisinage immédiat du point z=c, développons la fonction (16) en se servant des relations:

ce qui donne, en négligeant les termes d'ordre supérieur :

(24)

On voit que les vitesses sur des arrêtes pointues ne sont pas infinies, ce qu'on pourrait juger à première vue d'après (16), et ce qui serait le cas au contraire dans un liquide idéal. C'est un résultat de grande portée mais qu'ils sont zéro. sur la théorie de Helmholtz concernant la formation des jets d'afflux des liquides.

La même équation (24) résulte des équations générales (14) par la substitution

elle représente le passage d'un liquide infini autour d'une arrête pointue, fig. 2,

Les lignes de flux, qui résultent de , ψ sont des paraboles confocales avec le point +c. Les mêmes éq. fournissent les valeurs du tourbillon et de la p.

Ces fonctions sont indéfinies dans le point c, elles varient à l'infini

§10. Les exemples §. – nous donnent l'occasion de montrer, qu'il y a aussi d'autres mouvements compatibles avec les mêmes données aux limites c'est à dire avec les mêmes parois et la même distribution de la pression à l'infini, mais qu'il n'y a aucun de mouv. fini que le mouv. (16).

Adoptons p. ex. la forme , avec superposition d'un mouvement correspondant D

et procédons de la même manière que dans le §7. Nous trouvons:

ce qui remplira les conditions .. à la paroi $y=0$ pour des fonctions ?

La substitution de $f=$ donne :

28)

C'est un mouvement qui ~~remplit~~ satisfait à la condition donc on pourrait

le superposer sur (16) sans changement de la pression à l'infini, mais

il appartient à la classe des m... infinis puisque

Il correspond ~~à~~ au passage du liquide le long d'une paroi percée d'un

trou $x/y=3$.

§ 11). Si nous examinons l'état dans le voisinage de ~~...~~ comme dans nous obtenons :

~~ce qui~~ ce qu'on pouvait ~~...~~ déduire directement de (27) par la subst. $f\alpha_1 = V_1$

Cela représente le passage ~~...~~ tangentiel ~~...~~ du liquide le long d'une arête pointue

la forme des lignes de flux est déterminée par l'éq.

En superposant cette solution sur (24) après les avoir multipliées par des

coefficients constants, on obtient ~~...~~ des équations qui représentent le passage

auprès d'une arête pointue avec ~~...~~ des composantes données normale et

tangentielle. Ainsi la fig. représente le mou~~...~~

dont les lignes de flux ~~...~~ pour des x négatifs ~~...~~ s'approchent graduellement à une indéterminée

§ 12). ~~...~~ L'état du mouvement dans une grande distance résulte

de l'emploi des mêmes développements que dans § 8. Si nous omettons

les termes { .. ~~qui n'ont pas d'importance, et comme~~ ~~ce qui représentant ...~~ définissant un mouvement potentiel,

~~sans ...~~ qui ne nous intéresse pas nous ~~...~~ arrivons aux éq.

~~et~~ qui s'obtiennent aussi ~~par~~ de (24) par la substitution ... =

Elles représentent un mouvement dans l'étendue d'un demi-plaine, causé par l'existence d'un courant tangentiel élémentaire dans O. D'autre part ~~ce~~ ce mouvement peut être regardé comme ~~...~~ efflux d'une source $\frac{c^2}{2}$ au point O dans l'espace entre les parois perpendiculaires X Y. En superposant cette solution sur (21) on obtient ~~...~~ l'efflux d'une source dans l'espace entre des parois inclinées sous l'angle (moindre de $\frac{\pi}{2}$) $\alpha = \text{arctg}\, a$:

$u = \ldots$ ... (32).

La vitesse résultante, ~~...~~ radiale, est :

~~*) En regard de la ... La continuité des vitesses on peut ...~~

*) La condition de la continuité des vitesses donne naissance à la règle suivante : On peut superposer toujours des mouvements ~~caractérisés par~~ correspondants à la même forme des parois. Aussi des mouvements à différentes formes des parois peuvent être superposés, mais dans ce cas seulement si l'espace occupé par le liquide dans son mouvement résultant ne contient pas ces endroits où se trouvaient les parois d'un des mouv. composants.

Je remarquerai encore que le mouvement (31) de même que 21 est contenu, comme forme limite, parmi les mouvements examinés par Rayleigh ; il résulte de l'équ. (18) ... lorsque ~~...~~ le rayon du cercle qui contient le ~~mouvement~~ liquide s'étend à l'infini.

D'autre part il est intéressant de comparer les mouv. ... avec les mouvements correspondants à symmétrie axiale qui ont été ~~examinés~~ étudiés par Sampson.

Cet auteur a démontré, ~~que~~ qu'auprès d'une paroi plane avec ouverture circulaire un mouvement peut naître dont les lignes de flux (dans la coupe ~~...~~ axiale) sont des hyperboles coaxiales. La fonction de flux ψ est +

où c désigne le rayon de l'ouverture, V la vitesse dans son milieu, η la coordonnée hyperbolique du point xy, c'est à dire la racine hyperbolique de l'équ. en λ :

Dans le voisinage immédiat des bords de l'ouverture, c'est à dire dans des distances petites par rapport à diamètre, les hyperboles dégénèrent en paraboles et le mouvement 33 coïncide en effet avec le mouvement étudié dans le § 9.

Pour des grandes distances de l'ouverture, au contraire, les équations de Sampson donnent des formules qui représentent un écoulement à trois dimensions d'une source dans une paroi plaine; le résultat est analogue en quelque sorte au § 8, puisque le liquide y est animé aussi avec une vitesse radiale, la différence consiste dans ce qu'elle change proportionnelle au $\sin^2\theta$, mais (en raison inverse du carré de la distance r; la distribution de la pression est déterminée par la formule: